Es gibt neben der idealen Kreisbahn keine elliptischen Umlaufbahnen des Zweikörperproblems für mehr als 3 Raumdimensionen

Eine erste analytische Lösung hierzu wurde bereits von Ehrenfest präsentiert, im Jahr 1917. Weitere Arbeiten folgten, wobei ein grundlegender Gedanke allen gemeinsam war: Für die Stabilitätsbetrachtungen im n-dimensionalen Raum wurde der Potentialverlauf aus Kontinuitätsüberlegungen gewonnen. Mit anderen Worten, ein Kraftfeld $F(r)$ um eine (punktförmige) Quelle fällt mit der Entfernung r umgekehrt proportional zur entsprechenden Kugeloberfläche $O_n(r)$. Für den dreidimensionalen Raum erhalten wir mit $O_3(r) = 4\pi r^2$ den wohlbekannten Abfall $F(r) \sim 1/(4\pi r^2) \sim 1/r^2$. Für den n-dimensionalen Raum benötigen wir demnach die Oberfläche einer n-dimensionalen Kugel. Hierzu betrachten wir zunächst das n-dimensionale Integral $I_n = \int_{R^n} e^{-|x|^2} dx$ und stellen fest, dass es sich als n-te Potenz des eindimensionalen Integrals $I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$ schreiben lässt in der Form:

$$\begin{aligned} I_n = \int_{R^n} e^{-|x|^2} dx &= \int_{x_1=-\infty}^{+\infty} \dots \int_{x_n=-\infty}^{+\infty} e^{-x_1^2} \dots e^{-x_n^2}\, dx_1 \dots dx_n = \\ &= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x_1^2}\, dx_1 \right) \dots \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x_n^2}\, dx_n \right) = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x_1^2}\, dx_1 \right)^n = I_1^n \end{aligned} \tag{1}$$

Diese Eigenschaft werden wir uns zunutze machen, wobei wir zunächst I_n nochmals in Kugelkoordinaten anschreiben

$$I_n = \int_{r=0}^{\infty} \int_{S_n} e^{-r^2} r^{n-1}\, dr\, d\Omega_n, \tag{2}$$

mit der n-Sphäre S_n und dem Raumwinkel Ω_n. Die Oberfläche der n-dimensionalen Einheitskugel $O_n(r=1)$ ist

$$O_n(r=1) = \int_{S_n} d\Omega_n, \tag{3}$$

somit lässt sich I_n weiter vereinfachen:

$$I_n = O_n(r=1) \int_0^{\infty} e^{-r^2} r^{n-1}\, dr. \tag{4}$$

Wir substituieren $t = r^2$ und erhalten

$$\int_0^{\infty} e^{-r^2} r^{n-1}\, dr = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\frac{n}{2}-1}\, dt = \frac{\Gamma(n/2)}{2} \tag{5}$$

und somit

$$I_n = O_n(r=1) \frac{\Gamma(n/2)}{2}. \tag{6}$$

Nun greifen wir zurück auf die eingangs gezeigte Eigenschaft $I_n = I_1^2$ und erhalten mit $O_2(r = 1) = 2\pi$ und $\Gamma(1) = 1$ unmittelbar $I_1 = \sqrt{I_2} = \sqrt{\pi}$. Es folgt

$$O_n(r = 1) = \frac{2}{\Gamma(n/2)}\ I_1^n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}. \tag{7}$$

Wir erhalten die Jakobigleichung

$$O_n(r) = O_n(r = 1)\ r^{n-1} = \frac{2}{\Gamma(n/2)}\ I_1^n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}\ r^{n-1} \tag{8}$$

mit der Gammafunktion $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$ und $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$. Daraus folgt schließlich ein n-dimensionales Kraftfeld $F(r) \sim \frac{1}{r^{n-1}}$ bzw. ein entsprechendes Potential

$$E_{pot}(r) \sim -\frac{1}{r^{n-2}}. \tag{9}$$

Genau hier setzen nun modernere Publikationen den Hebel an und argumentieren, daß in höherdimensionalen Räumen mit modifizierten Maxwellgleichungen zu arbeiten sei, die nicht notwendigerweise die Kontinuitätsgleichung erfüllen und somit der Potentialverlauf hierdurch nicht vorgeprägt sei. Vergleiche hierzu Burgbacher, Lämerzahl und Macias[1].
Um Probleme dieser Art bereits im Vorfeld so weit als möglich auszuschließen, wählen wir deshalb eine allgemeinere, quantenfeldtheoretische Betrachtung eines N-dimensionalen Raumes, bzw. einer (N+1)-dimensionalen Raumzeit. Hierzu entleihen wir uns die Ausführungen von Zee[2] zur (3+1)-dimensionalen Raumzeit und verallgemeinern auf $(N{+}1)$ Dimensionen.
Wir beginnen mit der Klein-Gordon-Gleichung

$$(\partial^2 + m^2)\varphi = 0 \tag{10}$$

und der entsprechenden Lagrangefunktion für das freie Feld in N-Raumdimensionen:

$$L = \frac{1}{2}\int d^N x\ (\partial\varphi^2 - m^2\varphi^2). \tag{11}$$

Dann unterwerfen wir das Vakuum einer zeitabhängigen Störung $J(t)$, mit

$$J(t) := \begin{cases} \neq 0 \text{ für } t \in [0, T] \\ = 0 \text{ sonst.} \end{cases} \tag{12}$$

Diese Störung führt letztendlich zur Entstehung von Teilchen, da das Vakuum $|0\rangle$ nach Einwirkung der Störung nicht mehr der Zustand niedrigster Energie ist. Die Amplitude des gestörten Vakuums ergibt

$$\langle 0|e^{-\frac{i}{\hbar}HT}|0\rangle \text{ mit } H = \frac{p^2}{2} + \frac{\omega^2 q^2}{2} - J(t)q. \tag{13}$$

Für die weitere Darstellung greifen wir auf den Pfadintegralformalismus zurück. Wer damit bestens vertraut ist, kann direkt mit Gleichung (14) fortfahren, alternativ folgt als Einschub eine entsprechende Herleitung. Hierfür beginnen wir mit dem unitären Zeitentwicklungsoperator

$$U = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}HT\right).$$

Der Anfangszustand sei $|i\rangle$ (initial) und der Endzustand sei $|f\rangle$ (final); so ergibt sich die Amplitude, bei $|i\rangle$ zu starten und bei $|f\rangle$ zu enden als $\langle f|\exp(-\frac{i}{\hbar}HT)|i\rangle$. Man bezeichnet diese Größe als "Propagator" $K(f,i;t_f,t_i)$. Ziel ist es nun, diesen Propagator als Funktionalintegral über alle Integrationswege (Pfade) von $|i\rangle$ nach $|f\rangle$ darzustellen.
Hierfür unterteilt man den Zeitraum T in $N+1$ Abschnitte mit jeweils $\Delta t = T/N$:

$$\begin{aligned}\langle f|e^{(-\frac{i}{\hbar}HT)}|i\rangle &= \langle f|e^{(-\frac{i}{\hbar}H\Delta t)}\ e^{(-\frac{i}{\hbar}H\Delta t)}\ ...\ e^{(-\frac{i}{\hbar}H\Delta t)}|i\rangle \\ &= \langle f|U(t_f,t_n)\ U(t_n,t_{n-1})...U(t_1,t_i)|i\rangle.\end{aligned}$$

Wir benennen die Zustände zu jedem Zeitabschnitt j als q_j und erweitern die Entwicklungsoperatoren jeweils mit $1 = \int |q_n\rangle\langle q_n|\ dq_n$:

$$\langle f|\prod_{k=n}^{0} U(t_{k+1},t_k)|i\rangle = \langle f|U(t_f,t_n)\int |q_n\rangle\langle q_n|\ dq_n\ U(t_n,t_{n-1})...\int |q_1\rangle\langle q_1|\ dq_1\ U(t_1,t_i)|i\rangle.$$

Dies läßt sich schreiben als

$$K(f,i;t_f,t_i) = \int\left(\prod_{k=1}^{n} dq_k\right)\prod_{k=0}^{n} K(q_{k+1},q_k;t_{k+1},t_k).$$

Mit anderen Worten, der Propagator (für die Amplitude von $|i\rangle$ nach $|f\rangle$) ergibt sich als Produkt der einzelnen Propagatoren jedes Zeitschrittes aufintegriert über das Raummaß ($\prod_{k=1}^{n} dq_k$).
Es genügt somit, den Propagator eines Zwischenschrittes zu berechnen. Wir verwenden hierzu die Entwicklung der Exponentialfunktion gemäß

$$e^{(-\frac{i}{\hbar}H\Delta t)} = 1 - \frac{i}{\hbar}H\Delta t + O(\Delta t^2)$$

sowie die Matrixelemente des Hamiltonoperators

$$\begin{aligned}\langle\tilde{q}|H|q\rangle &= \int dp\ \langle\tilde{q}|p\rangle\langle p|H|q\rangle \\ &= \int dp\ \langle\tilde{q}|p\rangle\langle p|q\rangle H(p,q) \\ &= \int \frac{dp}{h}H(p,q)e^{\frac{i(\tilde{q}-q)p}{\hbar}}\end{aligned}$$

und erhalten

$$
\begin{aligned}
K(q_{k+1}, q_k; t_{k+1}, t_k) &= \int \frac{dp}{h} \left(1 - \frac{i\Delta t_k}{\hbar} H(p_k, q_k)\right) e^{\frac{i(q_{k+1}-q_k)p_k}{\hbar}} \\
&= \int \frac{dp}{h} e^{\frac{i\Delta t_k}{\hbar}\left(\frac{q_{k+1}-q_k}{\Delta t_k} p_k - H(p_k,q_k)\right)}.
\end{aligned}
$$

Für den Propagator von $|i\rangle$ nach $|f\rangle$ erhalten wir:

$$
K(f, i; t_f, t_i) = \int \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{dq_k dp_k}{h}\right) \frac{dp_i}{h} \exp\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{i\Delta t_k}{\hbar} \frac{q_{k+1} - q_k}{\Delta t_k} p_k - H(p_k, q_k)\right).
$$

Schließlich bilden wir den Grenzwert für die Anzahl der Zwischenschritte $N \to \infty$, gleichbedeutend mit $\Delta t \to 0$. Damit geht die Summe von $k = 0$ bis n über in ein Integral nach dt und der Term $\frac{q_{k+1}-q_k}{\Delta t_k}$ wird zu $\dot{q}$. Wir erhalten:

$$
\begin{aligned}
K(f, i; t_f, t_i) &= \int Dp\ Dq\ e^{\frac{i}{\hbar}\int_{t_i}^{t_f} (p\dot{q} - H(p,q))\ dt} \quad mit \\
Dp\ Dq &= \lim_{n\to\infty} \frac{dp_i}{h} \prod_{k=1}^{n} \frac{dq_k dp_k}{h}.
\end{aligned}
$$

Dies ist die allgemeine Darstellung des Propagators im Pfadintegralformalismus. In unserem speziellen Fall hängt der Hamiltonoperator ausschließlich quadratisch vom Impuls ab mit

$$
H(p, q) = \frac{p^2}{2m} - V(q).
$$

Somit kann glücklicherweise die Integration über p mit Hilfe des Gaußschen Integrals

$$
\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\frac{ax^2}{2} + ibx)dx = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}\ \exp(-\frac{b^2}{2a})
$$

durchgeführt werden. Wir substituieren $a \equiv i\Delta t/\hbar$ und $b \equiv (q_{k+1} - q_k)/\hbar$ und berücksichtigen, daß

$$
\lim_{\Delta t\to\infty} \frac{(q_{k+1} - q_k)^2}{\Delta t} = \dot{q}^2\ \Delta t.
$$

Damit erhalten wir unsere gesuchte Darstellung:

$$
\begin{aligned}
K(f, i; t_f, t_i) &= \int Dq\ e^{\frac{i}{\hbar}\int_{t_i}^{t_f} dt\ L(\dot{q},q)} \quad \text{mit} \\
Dq &= \lim_{n\to\infty} \frac{dp_i}{h} \prod_{k=1}^{n} \frac{dq_k dp_k}{h}.
\end{aligned}
$$

Die Amplitude des gestörten Vakuums läßt sich also demnach durch das euklidische Pfadintegral Z wie folgt darstellen:

$$Z = \int D\varphi \; e^{\frac{i}{\hbar} \int d^{N+1}x \; [\frac{1}{2}(\partial\varphi^2 - m^2\varphi^2) + J\varphi]}. \tag{14}$$

Jetzt integrieren wir im Exponenten partiell und setzen voraus, daß das Feld rasch abfällt:

$$Z = \int D\varphi e^{\frac{i}{\hbar} \int d^{N+1}x \; [-\frac{1}{2}\varphi(\partial^2 + m^2)\varphi) + J\varphi]}. \tag{15}$$

Wir legen $D(x-y)$ fest durch die Gleichung

$$-(\partial^2 + m^2)D(x-y) = \delta^{(N+1)}(x-y) \tag{16}$$

und erhalten

$$Z = C \; e^{-\frac{i}{2\hbar} \iint d^{N+1}x \; d^{N+1}y \; J(x)D(x-y)J(y)} \equiv C \; e^{iW(J)} \quad \text{mit} \quad C = Z(J=0). \tag{17}$$

Somit erhalten wir für die freie Feldgleichung in N Raumdimensionen:

$$W(J) = -\frac{1}{2} \iint d^{N+1}x \; d^{N+1}y \; J(x)D(x-y)J(y). \tag{18}$$

Für eine entkoppelte Darstellung wechseln wir in den Fourierraum

$$W(J) = -\frac{1}{2} \iint \frac{d^{N+1}k}{[2\pi]^{N+1}} J^*(k) \frac{1}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} J(k). \tag{19}$$

Betrachten wir $J(x) = J_1(x) + J_2(x)$ mit zwei lokalen Störungen $J_1(x)$ und $J_2(x)$. Jetzt enthält $W(J)$ jeweils einen Term mit $J_1^* J_1, J_2^* J_2, J_1^* J_2$ sowie $J_2^* J_1$. Wir sind interessiert an einer Wechselwirkung, deshalb gilt unser Augenmerk den letzten beiden Termen, die eine interessante Eigenschaft zeigen. Betrachten wir beispielsweise nur den Beitrag $w(J)$ des letzten Terms zu $W(J)$

$$w(J) = -\frac{1}{2} \iint \frac{d^{N+1}k}{[2\pi]^{N+1}} \frac{J_2^*(k) J_1(k)}{k^2 - m^2 + i\varepsilon}, \tag{20}$$

so fällt auf, daß der Term nur dann wesentlich beiträgt, wenn einerseits die Störungen J_1 und J_2 im Fourierraum sich überschneiden und andererseits der Ausdruck $k^2 - m^2$ innerhalb dieses Überschneidungsgebietes möglichst klein wird. Im Falle $k^2 = m^2$ erhalten wir ein ausgeprägtes Maximum. Wie interpretieren wir das physikalisch?
Im Gebiet 1 der Raumzeit existiert eine Quelle, die eine Störung verursacht, die von einer Senke im Gebiet 2 der Raumzeit wieder absorbiert wird. Das ist die feldtheoretische Beschreibung der Bewegung eines Teilchens der Masse m von 1 nach 2.

Betrachten wir also jeweils ein scharf abgegrenztes, zeitlich unabhängiges $J_1(x) = \delta^N(\vec{x} - \vec{x}_1)$ bzw.

$J_2(x) = \delta^N(\vec{x} - \vec{x_2})$. Wiederum interessieren wir uns für die Wechselwirkung und betrachten deshalb ausschließlich die gemischten Terme. Zuerst setzen wir $J(x) = J_1(x) + J_2(x)$ in (18) ein und integrieren über $d^N x$ und $d^N y$:

$$W(J) = -\int d^0x \int d^0y \int \frac{d^0k}{2\pi} e^{ik^0(x-y)^0} \int \frac{d^Nk}{(2\pi)^N} \frac{e^{i\vec{k}(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)}}{k^2 - m^2 + i\varepsilon}. \tag{21}$$

Integration über dy^0 ergibt

$$W(J) = -\int d^0x \int \frac{d^Nk}{(2\pi)^N} \frac{e^{i\vec{k}(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)}}{k^2 + m^2 + i\varepsilon}. \tag{22}$$

Der Nenner $k^2 + m^2$ ist immer positiv, dadurch entfällt der infinitesimale Term $i\varepsilon$. Das Integral $\int dx^0$ ergibt das Zeitintervall T. Mit $iW = iET$ folgt

$$E = -\int \frac{d^Nk}{(2\pi)^N} \frac{e^{i\vec{k}(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)}}{k^2 + m^2}. \tag{23}$$

Der Energiebeitrag ist negativ, d.h. die beiden bei $\vec{x}_1$ und $\vec{x}_2$ lokal scharf abgegrenzten Quellen können die Gesamtenergie verringern, indem sie ihren Abstand verkleinern. Mit anderen Worten: Durch die Kopplung an das Feld ziehen die beiden Quellen einander an.

An dieser Stelle sollten wir vielleicht unser Ergebnis weiter verifizieren. Was eignet sich hierfür besser als der Spezialfall des 3-dimensionalen Raumes? Sein Wechselwirkungs-Potential kennen wir nur zu gut.

Wir lösen also das Integral für $N = 3$, wofür sich sphärische Koordinaten anbieten. Mit den Substitutionen $\vec{x} \equiv (\vec{x}_1 - \vec{x}_2)$ und $\xi \equiv \cos\theta$, wobei θ der Winkel zwischen $\vec{k}$ und $\vec{x}$ ist, folgt:

$$E = -\int \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dk\ k^2 \int_{-1}^{+1} du \frac{e^{ikr\xi}}{k^2 + m^2} = \frac{2i}{(2\pi)^2 ir} \int_0^\infty dk\ k \frac{\sin(kr)}{k^2 + m^2}. \tag{24}$$

Der Integrand ist eine gerade Funktion, dadurch können wir die Grenzen erweitern und erhalten

$$E = -\frac{1}{(2\pi)^2 r} \int_{-\infty}^\infty dk\ k \frac{\sin(kr)}{k^2 + m^2} = \frac{1}{(2\pi)^2 ri} \int_{-\infty}^\infty dk\ k \frac{e^{ikr}}{k^2 + m^2}. \tag{25}$$

Mit positivem r erhalten wir ein geschlossenes Integral mit einer Polstelle bei $k = -im$ und somit

$$E = -\frac{1}{4\pi r} e^{-mr}. \tag{26}$$

Damit haben wir alles was wir brauchen: E ist die potentielle Energie zwischen den beiden Quellen; m ist die Masse des Austauschteilchens. Unterstellen wir jetzt ein masseloses Wechselwirkungsteilchen, beispielsweise das Photon für die elektromagnetische Wechselwirkung oder das Graviton für die gravitative Wechselwirkung, so folgt

$$E = -\frac{1}{4\pi r} \propto \frac{1}{r}. \tag{27}$$

Voilá, für $N = 3$ erhalten wir einen Potentialverlauf, wie wir ihn erwarten. Das macht neugierig auf das Potential für beliebiges N; die Lösung liegt bereits auf der Hand:
Natürlich verändern sich die Vorfaktoren; die interessieren uns aber nicht wirklich. Als einzige wesentliche Modifikation erhalten wir anstelle von r nun ein r^{N-2} und damit:

$$E \propto \frac{1}{r^{N-2}}. \tag{28}$$

Wir sind mit der Klein-Gordon-Gleichung gestartet und haben am Ende für den N-dimensionalen Raum in Verbindung mit einem masselosen Austauschteilchen ein $1/r^{N-2}$ - Potential erhalten. Dies steht in Übereinstimmung mit dem Potentialverlauf (9), den wir aus Kontinuitätsüberlegungen gewonnen hatten.

Anhand dieses Potentialverlaufes gilt es nun zu zeigen, dass in Universen mit $n > 3$ keine stabilen Lösungen des Zwei-Körper-Problems existieren. Hierzu folgen wir einem Ansatz von Freeman [3] und verwenden folgende Bezeichnungen (jeweils bezogen auf den Planeten):

$$\begin{aligned} m &:= \text{Masse} \\ \dot{\varphi} &:= \text{Winkelgeschwindigkeit} \\ p &:= \text{Impuls} \\ L &:= \text{Drehimpuls} \\ r_{min} &:= \text{minimaler Bahnradius} \\ r_{max} &:= \text{maximaler Bahnradius.} \end{aligned}$$

Wir stellen die Gleichung der Energieerhaltung auf in den Punkten der maximalen und der minimalen Entfernung vom Zentralstern. Die kinetische Energie ergibt sich zu

$$E_{kin} = \frac{p^2}{2m} = \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2 = \frac{L^2}{2mr^2} \quad \text{mit} \quad L = mr^2\dot{\varphi} \tag{29}$$

und die potentielle Energie kennen wir bereits (sei C der konstante Vorfaktor):

$$E_{pot} = -\frac{C}{r^{n-2}}. \tag{30}$$

Daraus folgt

$$\frac{L^2}{2mr_{min}^2} - \frac{C}{r_{min}^{n-2}} = \frac{L^2}{2mr_{max}^2} - \frac{C}{r_{max}^{n-2}}. \tag{31}$$

Offensichtlich finden wir für beliebiges $n \geqslant 4$ die n-dimensionale Kreisbahn $r_{min}^2 = r_{max}^2$ als Lösung. Die exakte Kreisbahn ist jedoch als Orbit ungeeignet, da sie bereits durch kleinste Störungen aufgebrochen würde. In unserem vertrauten dreidimensionalen Raum wird dieses Problem durch die

Ellipse beantwortet. Es gilt also zu zeigen, dass für $n \geqslant 4$ keine entsprechenden Ellipsen existieren, oder allgemeiner gesprochen, kein Oszillieren zwischen zwei Extrema der Form $r_{min} < r_{max}$ möglich ist. Hierzu betrachten wir die Kräfte an den jeweiligen extremalen Bahnpunkten. Der Betrag der Gravitationskraft ergibt

$$F_G = \frac{dE_{pot}}{dr} = C\,\frac{n-2}{r^{n-1}} \tag{32}$$

und der Betrag der Zentrifugalkraft ist

$$F_Z = mr\dot{\varphi}^2 = \frac{L^2}{mr^3}. \tag{33}$$

Im Perihel ($r = r_{min}$) gilt $F_G < F_Z$ (der Planet wird sich ab diesem Zeitpunkt entfernen) und somit

$$C\,\frac{n-2}{r_{min}^{n-1}} < \frac{L^2}{mr_{min}^3}. \tag{34}$$

Entsprechend gilt im Aphel ($r = r_{max}$) $F_G > F_Z$ und

$$C\,\frac{n-2}{r_{max}^{n-1}} > \frac{L^2}{mr_{max}^3}. \tag{35}$$

Setzen wir diese beiden Ungleichungen wieder in die Energieerhaltung (31) ein, so ergibt sich

$$\frac{L^2}{2mr_{min}^2} - \frac{L^2}{(n-2)mr_{min}^2} \quad < \quad \frac{L^2}{2mr_{max}^2} - \frac{L^2}{(n-2)mr_{max}^2}\ \text{, bzw.} \tag{36}$$

$$\frac{L^2}{mr_{min}^2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n-2}\right) \quad < \quad \frac{L^2}{mr_{max}^2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n-2}\right). \tag{37}$$

Im Falle $n = 4$ ergibt sich der Widerspruch $0 < 0$.
Im Falle $n > 4$ kürzt sich der Klammerterm. Es existiert jedoch keine Lösung, die zugleich die Bedingung $r_{min} < r_{max}$ erfüllt.

Somit gibt es keine stabilen Ellipsen als Lösungen des Zweikörperproblems in Räumen mit mehr als drei Dimensionen.

Literatur

[1] F. Burgbacher, C. Lämmerzahl, A. Macias, *Is there a stable hydrogen atom in higher dimensions?* Journal of mathematical physics **40** 2, (1999).

[2] A. Zee, *Quantum Field Theory in a Nutshell* Princeton University Press (2003).

[3] I. M. Freeman, *Why is space three-dimensional?* Am. J. Physics **37** (1969), 1222.