

## Expansion des Universums, negativer Druck des Vakuums und Energieerhaltung

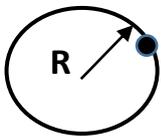
Ich möchte versuchen, ein wenig zur Klärung obiger Begriffe beizutragen, da im Forum immer wieder Fragen hierzu auftreten. Ausgangslage in der modernen Kosmologie:

Wir postulieren:

- 1.) Auf großen Skalen ist unsere Position im Universum durch nichts ausgezeichnet (sog. Kopernikanisches Prinzip)
- 2.) Das Universum sieht in alle Richtungen betrachtet gleich aus (wiederum auf ausreichend großen Skalen)
- 3.) Auf großen Skalen ist die vorherrschende Kraft im Universum die Gravitation, d.h. insbesondere, die Dynamik des Universums kann durch die Allgemeine Relativitätstheorie beschrieben werden. (Die Reichweite der beiden Kernkräfte ist zu kurz und die elektromagnetische Kraft hebt sich auf großen Skalen durch gleich viele positive wie negative Ladungen weg.)

Wir wissen: Die Newtonsche Mechanik bietet lokal, d.h. innerhalb unseres Sonnensystems und auch in der Milchstraße, eine effektive Beschreibung der Beobachtungen. Auf hinreichend kleinen Skalen liefert sie also - als Grenzfall der Allgemeinen Relativitätstheorie – einen einfachen Zugang.

Deshalb modellieren wir das Universum als ideales Gas, bestehend aus punktförmigen Galaxien. Ein kugelförmiges Volumen mit dem Radius  $R$  hätte demnach auf eine Masse  $m$  auf ihrer Oberfläche folgende Eigenschaften:



$$m \ddot{R} = -\frac{GMm}{R^2} \quad (\text{Gl. 0})$$

Betrachten wir nun eine Kugel mit veränderlichem Radius  $R(t) = r a(t)$  so folgt mit dem sog. Skalenfaktor  $a(t)$ :

$$r \ddot{a}(t) = -\frac{GM}{(r a(t))^2} \quad \text{mit} \quad M = \frac{4 (r a(t))^3 \pi}{3} \rho(t)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4 \pi G}{3} \rho(t) \quad (\text{Gl. 1})$$

Für die weitere Argumentation brauchen wir es zwar nicht, aber weil wir schon so dicht davor stehen sei noch bemerkt, dass man durch partielle Integration eine weitere, wichtige Beziehung für die Hubblekonstante  $H$  erhält:

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8 \pi G}{3} \rho(t) + \text{Krümmung} \quad (\text{Gl. 2})$$

Wie man leicht durch Differentiation prüfen kann...

Auf der Suche nach dem negativen Druck interessiert uns aber insbesondere Gleichung 1. Fügen wir rein formal zu Gleichung 0 eine Kraft proportional zu  $R$  hinzu, gewissermaßen eine aufspringende Feder, so erhalten wir mit der Substitution  $\text{const} / m = \Lambda / 3$ :

$$m \ddot{R} = -\frac{GMm}{R^2} + \text{const} \cdot R$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \rho(t) + \frac{\Lambda}{3} \quad (\text{Gl. 3})$$

Dieses Ergebnis behalten wir im Hinterkopf: Offensichtlich können wir durch eine derartige lineare aufspringende Feder einen Gegenspieler zur Abbremsung in Gleichung 3 einführen, gewissermaßen ein Gaspedal. Die Wirkung dieses Gaspedals deckt sich perfekt mit den Beobachtungsdaten entfernter Supernovae (Nobelpreis 2011 Perlmutter, Schmidt, Riess)

Als nächstes folgt die Gretchenfrage: Woraus soll unser selbstgebasteltes Universum bestehen, d.h. was setzen wir für die Energiedichte  $\rho(t)$  ein? Für verschiedene Bestandteile erhalten wir folgende Zustandsgleichungen aus der Thermodynamik:

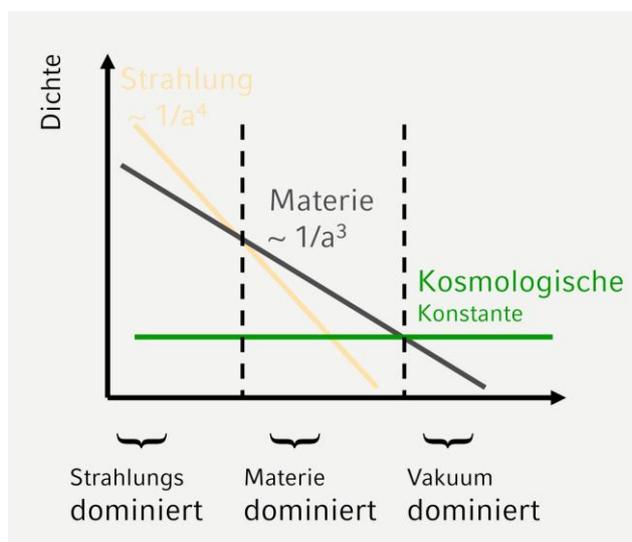
Wenn alle Längen um  $a(t)$  gedehnt werden folgt mit  $V(t) = a(t)^3$ :

Materie:  $\rho_m(t) \cdot V(t) = \text{const.}$

Strahlung:  $\rho_{\text{str}}(t) \cdot a(t) \cdot V(t) = \text{const.}$  (auch die Wellenlänge der Strahlung wird um  $a(t)$  gedehnt)

Vakuum:  $\rho_{\text{vak}}(t) = \text{const.}$

Das bedeutet, dass zu unterschiedlichen Zeiten im Universum unterschiedliche Bestandteile dominant beitragen. Sehr früh ist die Strahlung sehr dominant, später die Materie und zuletzt das Vakuum. Die Massendichte beträgt heute nur noch ein Wasserstoffatom pro drei Kubikmeter. Logarithmisch aufgetragen ergibt sich folgendes Bild:



Zusätzlich trägt gemäß  $E = mc^2$  auch der Druck in unserem Kugelvolumen gravitativ bei.

Kurzes Gedankenexperiment:

Eine komprimierte Feder wiegt mehr als eine entspannte Feder, weil zum Komprimieren eine Energie notwendig ist, die der entspannten Feder fehlt...

Der Druck besitzt im 3-dimensionalen Raum allerdings 3 Freiheitsgrade mit der Zustandsgleichung

$$p = \frac{\rho c^2}{3}$$

Der Druck für nichtrelativistische Geschwindigkeiten ( $\rho_m$ ) geht wiederum gegen null.

Wegen  $E = m c^2$  bzw.  $E/V = \rho / c^2$  folgen in Gleichung (1) bzw. (3) die dominanten Terme:

$$\rho(t) = (\rho_m + \rho_\Lambda + 3 p_{str} + 3 p_\Lambda) / c^2:$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = - \frac{4 \pi G}{3} (\rho_m + \rho_\Lambda + 3 p_{str} + 3 p_\Lambda) / c^2 \quad (\text{Gl. 4})$$

Bemerkung: Ich habe alle Terme der Dichte als Energiedichten formuliert – das erscheint mir einfacher für das Verständnis.  $\rho_m$  bedeutet dann aber keine Massendichte mehr, sondern eine Energiedichte aufgrund von Masse. Falls sich jemand daran stösst, braucht er/sie nur das  $c^2$  für die Massendichten weglassen.

Was müssen wir für  $\rho_\Lambda$  und  $p_\Lambda$  einsetzen, damit sich wieder Gleichung (4) ergibt?

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi G} = - p_\Lambda \quad (\text{Gl. 5})$$

Zur Kontrolle bitte einfach einsetzen und ausrechnen...

Formal bekommt mit Gleichung (5) der Druck des Vakuums sein negatives Vorzeichen!

Anschaulich ist das auch offenbar: Die aufspringende Feder bewirkt eine Expansion entgegen der bremsenden Gravitation.

Die Friedmangleichung jetzt nochmals in neuem Glanz:

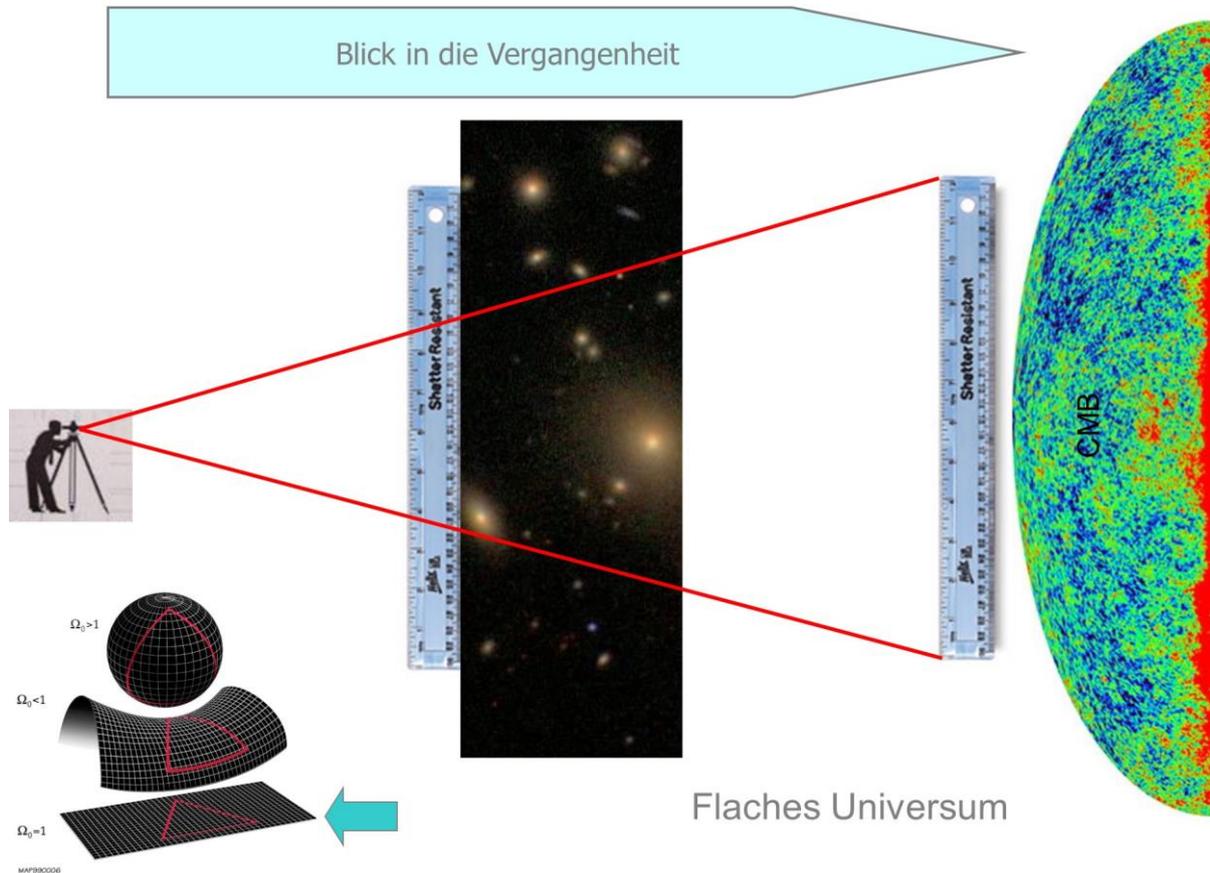
$$\frac{\ddot{a}}{a} = - \frac{4 \pi G}{3 c^2} (\rho_m - 3 p_\Lambda)$$

Das negative Vorzeichen (rot) steht für eine negative Beschleunigung, dh. ein abbremsendes Universum und falls die Vakuumenergiedichte die blaue Klammer dominiert, wodurch das rote Vorzeichen positiv wird, ergibt sich ein beschleunigt expandierendes Universum.

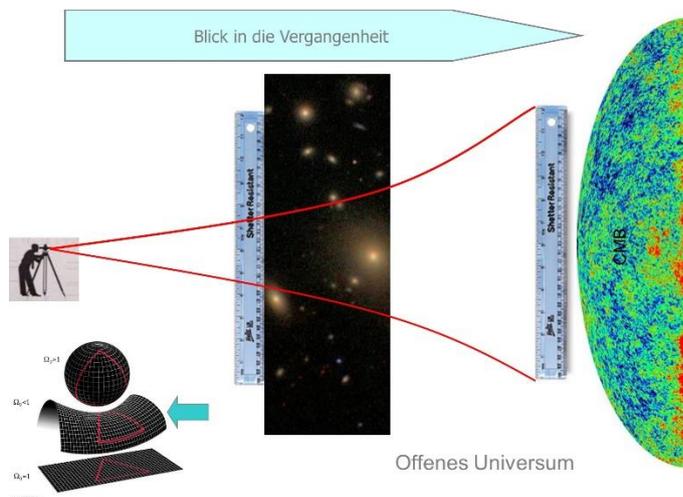
Ich hoffe, das erklärt die Rolle des negativen Drucks in der Expansion.

Zur nächsten Frage: Warum ist die Gesamtenergie null?

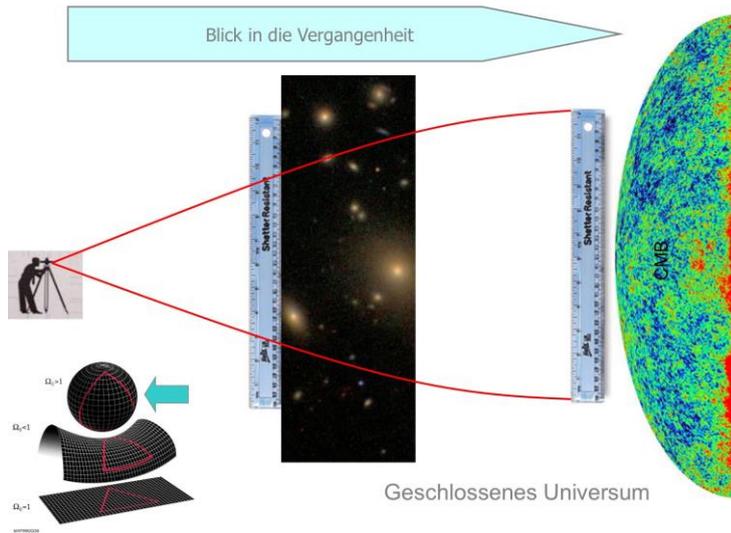
Weil wir in einem flachen Universum leben, dh. die beiden konkurrierenden Potentiale der Expansion und der Gravitation halten heben sich zu null weg. Warum glauben wir in einem flachen Universum zu leben? Weil die Winkelsumme der größtmöglichen Dreiecke, die wir zeichnen können, exakt 180 Grad ergibt. Dafür verbinden wir die heute beobachteten (SDSS) großräumigen Objekte mit ihren korrespondierenden Saatkörnern, den Fluktuationen in der Kosmischen Hintergrundstrahlung (CMB):



In einem sattelförmigen Universum hätte sich eine kleinere Winkelsumme ergeben:

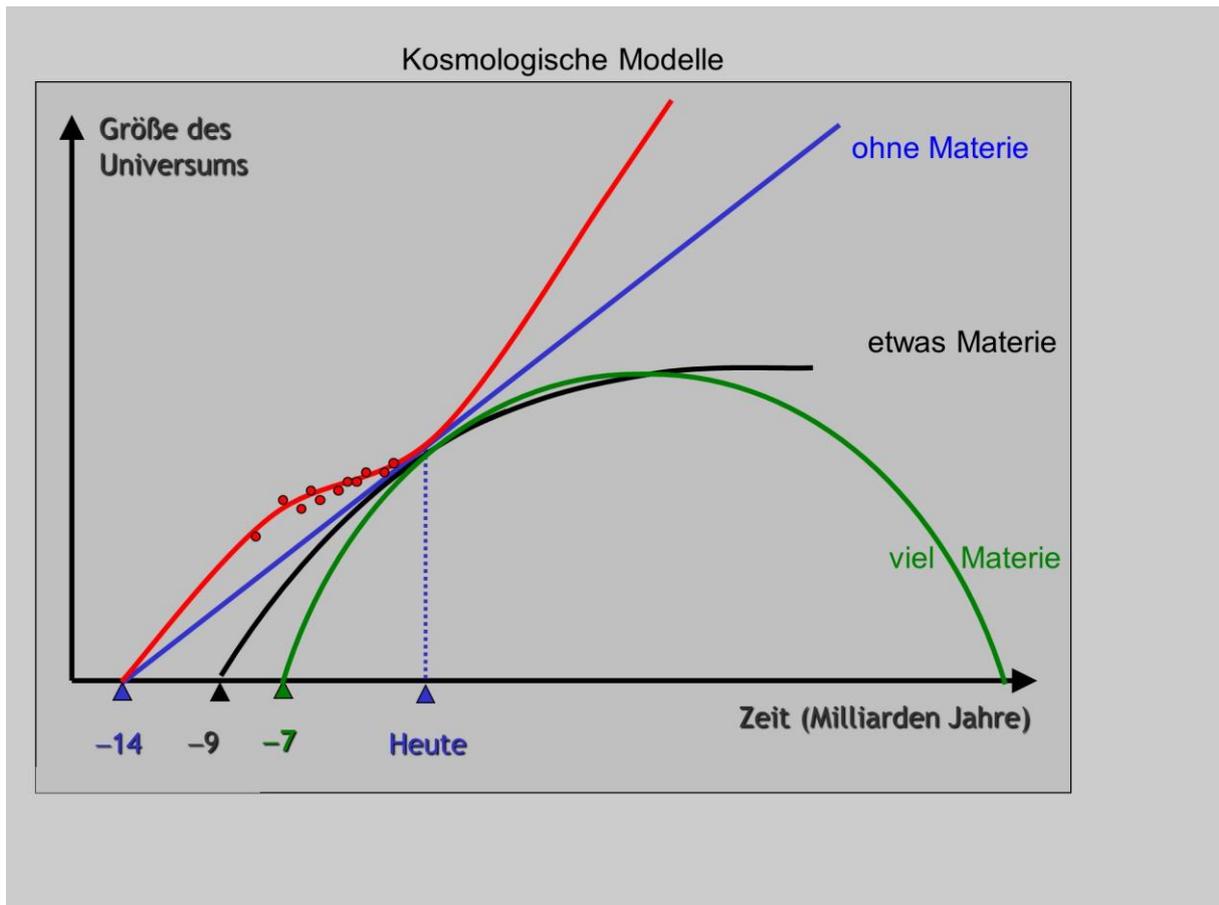


In einem kugelförmigen Universum hätte sich eine größere Winkelsumme ergeben:



Wir haben aber Dreiecke mit 180 Grad Winkelsumme – ergo ein flaches Universum.

Wie wird sich das Universum nun entwickeln?



Heute überwiegt die kosmologische Konstante die Materiedichte, dh. das Universum expandiert beschleunigt (rote Kurve). Was ist die kosmologische Konstante? Wir wissen es nicht! Es könnte eine Eigenschaft des Raumes sein, weil sie linear mit der Ausdehnung des Raumes ansteigt.

Zur Frage der Energieerhaltung:

Die Energieerhaltung ergibt sich bereits formal bereits durch unsere Ausgangspostulate. Würde in unser Kugelvolumen, über dessen absoluten Radius wir keine Einschränkung getroffen haben - von außen eine Energie fließen oder nach außen hin abfließen, wäre das Universum nicht von allen Punkten aus betrachtet isotrop. Wer will, kann es auch formal beechnen gemäß  $dE = - p dV$ , dann aber bitte für  $p$  ALLE Zustandgleichungen einsetzen...