

Gamma-Faktor

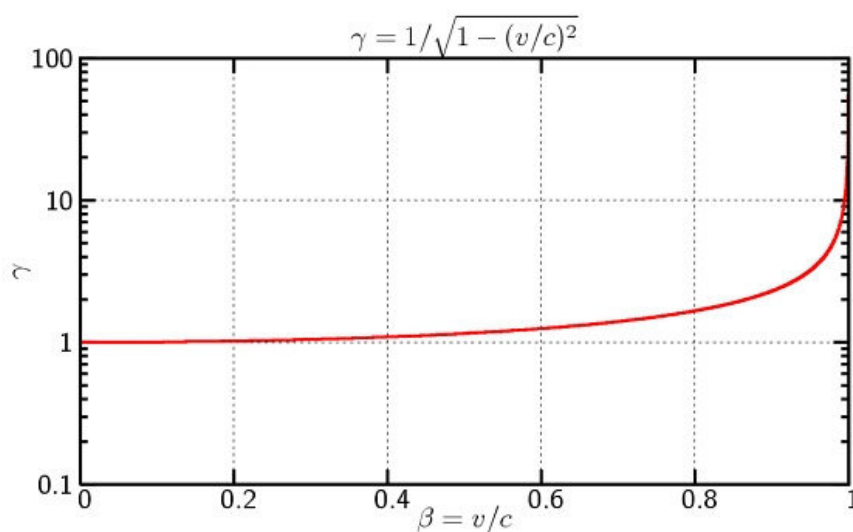
Warum kann man eine Rakete nicht auf Lichtgeschwindigkeit beschleunigen? Diese Frage führt unmittelbar zur Speziellen Relativitätstheorie und zu den Lorentz-Transformationen. Die Lorentz-Transformationen gestatten es, Ort x und Zeit t eines Ereignisses in einem Inertialsystem¹ S in die entsprechenden Größen x' und t' eines mit konstanter Geschwindigkeit v relativ zum System S bewegten Inertialsystem S' umzurechnen. Für den einfachen Fall zweier kartesischer Koordinatensysteme mit parallel orientierten Achsen, die sich längs der x -Achse mit der Geschwindigkeit v relativ zueinander bewegen, lauten die Gleichungen

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad y' = y \quad z' = z \quad (1)$$

wobei die gestrichenen Größen für das relativ zu S bewegte System S' stehen und c die Lichtgeschwindigkeit bedeutet. Es hat sich eingebürgert, S als das Ruhesystem und S' als das bewegte System zu bezeichnen. Der Ausdruck

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (2)$$

wird als Gamma- oder Lorentz-Faktor bezeichnet. Ist die Relativgeschwindigkeit v der beiden Inertialsysteme S und S' gleich Null, so ist $\gamma = 1$. Geht v gegen c , so geht γ gegen Unendlich. Die folgende Grafik zeigt den Verlauf von γ in Abhängigkeit von v :



(Quelle: www.wissenschaft-online.de/astrowissen/images/intermed/Lor-fac-tot.jpg)

¹ Ein Inertialsystem ist ein mit konstanter Geschwindigkeit geradlinig bewegtes System.

Allgemein ist γ ein Maß wie relativistisch² ein bewegtes System ist, d.h. in welchem Umfang die Phänomene der Relativitätstheorie in dem System zum Tragen kommen. Eine grobe Gliederung des relativistischen Ausmaßes eines Systems zeigt die folgende Aufstellung:

- γ gleich oder nahezu gleich 1: nicht relativistisch
- γ größer als 2: relativistisch
- γ größer als 10: mittelrelativistisch
- γ größer als 100: ultrarelativistisch

Die Gleichungen der Lorentz-Transformationen führen direkt zu den durch eine Relativbewegung verursachten Erscheinungen Zeitdilatation und Längenkontraktion. Im Folgenden werden die wichtigsten mit dem γ -Faktor verknüpften Phänomene der speziellen Relativitätstheorie vorgestellt.

Zeitdilatation

Der Beobachter im Ruhesystem nimmt die Zeit in einem zum Ruhesystem bewegten Inertialsystem verlangsamt wahr. Mit anderen Worten: In einem relativ zu einem System S bewegten System S' vergeht die Zeit langsamer. Diesen Effekt bezeichnet man als Zeitdilatation. Die Zeitverzögerung wird durch den γ -Faktor bestimmt. Es gilt:

$$t' = \frac{1}{\gamma} \times t \quad (3)$$

Der Effekt der Zeitdilatation ist vornehmlich in der Teilchenphysik und der Astronomie zu beobachten, wo Teilchengeschwindigkeiten nahe der Lichtgeschwindigkeit beobachtet werden. Besonders eindrücklich zeigt sich die relativistische Zeitdilatation bei den Myonen³, die durch die kosmische Strahlung⁴ in den oberen Schichten der Erdatmosphäre entstehen. Diese Teilchen zerfallen nach $2,2 \times 10^{-6}$ Sekunden. Selbst wenn sich die Myonen mit Lichtgeschwindigkeit bewegen würden, könnten sie in der Zeit bis zu ihrem Zerfall nur eine Strecke von 660 Metern zurücklegen. Viel zu wenig, um aus einer Höhe von 15 Kilometern bis auf die Erdoberfläche vorzudringen. Dennoch gelangen diese Myonen in die irdischen Detektoren. Grund dafür ist die relativistische Zeitdilatation, wodurch vom Standpunkt eines Beobachters auf der Erde die Zeit für die Teilchen langsamer vergeht. Bewegen sich die Teilchen mit

² In relativistischen Systemen ist die Geschwindigkeit v mit der Lichtgeschwindigkeit c vergleichbar.

³ Myonen, früher auch μ -Mesonen genannt, sind, ähnlich wie das Elektron und das Tau, Elementarteilchen. Sie gehören zur Familie der Leptonen.

⁴ Kosmische Strahlung ist eine Teilchenstrahlung aus Protonen und Elektronen.

0,9998 Prozent der Lichtgeschwindigkeit, so wird $\gamma = 50$, und die Zerfallszeit der Myonen verlängert sich auf $1,1 \times 10^{-4}$ Sekunden.

Auch in Teilchenbeschleunigern macht sich die Zeitdilatation bemerkbar. So verlängert sich z. B. die Lebensdauer instabiler Teilchen, was sich wiederum an Myonen gut testen lässt.

Noch drastischer macht sich dieser Effekt bei Photonen bemerkbar. Da sie sich relativ zu uns immer mit Lichtgeschwindigkeit bewegen ($v = c \rightarrow \gamma = \infty$), vergeht aus unserer Sicht in deren Bezugssystem die Zeit unendlich langsam. Mit anderen Worten: Für Photonen vergeht keine Zeit, Photonen altern nicht.

Längenkontraktion

Ein Beobachter im Ruhesystem S nimmt Längen in einem relativ zu ihm bewegten Bezugssystem S' verkürzt wahr. Die Längenkontraktion wird durch den γ -Faktor bestimmt. Es gilt:

$$L' = \frac{1}{\gamma} \times L \quad (4)$$

Auch damit kann man erklären, warum „atmosphärische“ Myonen auf die Erde gelangen können. Aus der Perspektive der Myonen schrumpft die Strecke von der oberen Atmosphärenschicht (15 Kilometer) bis zur Erde etwa um den Faktor 50. Die Teilchen müssen nur noch einen Weg von rund 300 Metern Länge zurücklegen, eine Strecke, die in der Zeit von $2,2 \times 10^{-6}$ Sekunden gut zu schaffen ist.

In Teilchenbeschleunigern unterliegen insbesondere massereiche Ionen, die aus vielen Nukleonen⁵ bestehen, dem Effekt der Längenkontraktion. Vom Ruhesystem betrachtet, sind sie in Flugrichtung gestaucht. Ihre ursprünglich kugelige Gestalt wird zu einer mehr oder weniger flachen Scheibe deformiert.

Den Photonen verhilft die Längenkontraktion wieder zu einer Sonderstellung. Aus ihrer Sicht kommen ihnen die Objekte im Raum mit Lichtgeschwindigkeit entgegen. Folglich verkürzen sich alle in Flugrichtung vor ihnen liegenden Entfernungen auf die Länge Null. Photonen legen daher beliebige Strecken ohne Zeitverzug zurück, sie reisen instantan von einem Ende des Universums zum anderen.

Relativistische Massenzunahme

Nach Einstein besitzt die Masse m_0 im Ruhesystem S die Ruheenergie $E_0 = m_0 c^2$.

⁵ Die Bausteine der Atomkerne, die Protonen und Neutronen, bezeichnet man als Nukleonen.

Befindet sich die Masse m_0 in einem mit der Geschwindigkeit v relativ zum Ruhesystem bewegten System S' , so addiert sich, aus Sicht eines Beobachters im System S , zu E_0 die kinetische Energie E_{kin} . Damit erhält man für die Gesamtenergie einer mit der Geschwindigkeit v bewegten Masse m_0 den Ausdruck

$$E_{\text{gesamt}} = E_0 + E_{\text{kin}} = m_0 c^2 + (\gamma - 1) m_0 c^2 \quad (5)$$

beziehungsweise

$$E_{\text{gesamt}} = \gamma m_0 c^2. \quad (6)$$

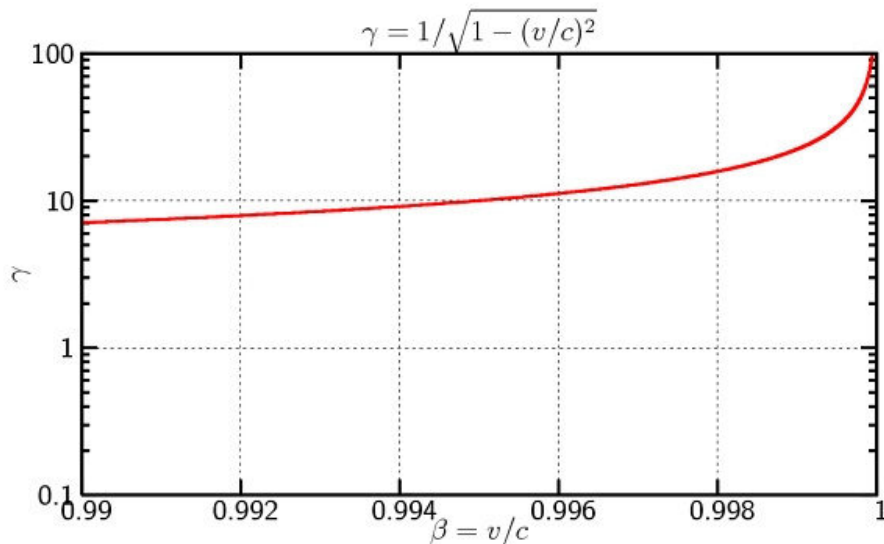
Da c eine Konstante ist, gilt für die Masse im bewegten System

$$m' = \gamma m_0. \quad (7)$$

Mithin gilt: In einem mit der Geschwindigkeit v bewegten System sind Massen um den γ -Faktor vergrößert. Damit wird klar, warum eine Rakete nicht auf Lichtgeschwindigkeit beschleunigt werden kann. Geht v gegen c , so geht m' gegen Unendlich. Um eine Masse unendlicher Größe zu beschleunigen, wäre eine unendlich große Kraft nötig, die es nicht gibt.

In Teilchenbeschleunigern wie dem LHC am Kernforschungszentrum CERN oder HERA bei DESY spielt der Effekt der relativistischen Massenzunahme in mehrerer Hinsicht eine Rolle. Vergleicht man die Geschwindigkeiten der von den Vorbeschleunigern kommenden Teilchen mit ihrer Endgeschwindigkeit im LHC bzw. HERA, so ist der Unterschied marginal. In den großen Maschinen wird v nur noch um Bruchteile eines Prozents gesteigert. Wie die nachstehende Grafik zeigt, ist es gerade diese letzte Annäherung von v an c , die den γ -Faktor gewaltig vergrößert. Daher gewinnen die Teilchen in den Beschleunigern ihre Energie im Wesentlichen durch den Zuwachs an Masse gemäß $E = \gamma m_0 c^2$ und weniger aufgrund einer Steigerung ihrer Geschwindigkeit. Für den enormen Energiebedarf der Beschleuniger ist demnach vornehmlich die Vergrößerung der Teilchenmassen verantwortlich.

Diese Massenzunahme wirkt sich auch auf die längs der Vakuumröhren der Speicherringe platzierten Ablenk- und Fokussiermagnete aus, welche die Teilchen auf eine Kreisbahn zwingen. Je größer die Teilchenmasse, desto größer ist die Zentrifugalkraft $m\omega^2 r$, welche die Teilchen aus der Bahn zu treiben versucht. Entsprechend stark müssen die Magnetfelder sein. Die dazu nötigen Ströme in den Magnetspulen sind nur noch in mit Helium gekühlten, supraleitenden Magneten zu beherrschen.



Verlauf des γ -Faktors von $\beta = 0,99$ bis $\beta = 1$

(Quelle: www.wissenschaft-online.de/astrowissen/images/intermed/Lor-fac-tot.jpg)

Relativistischer Impuls

In einem bewegten System wächst auch der Impuls p mit dem γ -Faktor. Es gilt:

$$p = m'v = \gamma m_0 v. \quad (8)$$

Alternative Schreibweisen des γ -Faktors

Ersetzt man in Gleichung (2) v durch $p/(\gamma m_0)$, mit p gleich dem relativistischer Impuls, so erhält man nach kurzer Umformung den Ausdruck

$$\gamma = \sqrt{1 + \left(\frac{p}{mc}\right)^2} \quad (9)$$

Die Gleichung (5) aufgelöst nach γ führt zu dem Ausdruck:

$$\gamma = \frac{E_{\text{kin}}}{E_0} + 1 \quad (10)$$

γ -Faktor in der Astronomie

Obwohl die Astronomie eine Vielzahl von Prozessen mit hohen γ -Werten zu bieten hat, sind Daten dazu spärlich. Die folgenden Angaben stammen von dem im Internet (http://www.wissenschaft-online.de/astrowissen/lexdt_I06.html) von Andreas Müller publizierten „Astro-Lexikon“:

Relativistischen Geschwindigkeiten begegnet man vornehmlich bei der Akkretion von Materie auf ein Schwarzes Loch, aber auch bei von Sternen und Supernovae und insbesondere von Aktiven Galaktischen Kernen (AGN) ausgehenden Materie-Jets. Der γ -Faktor kann dort Werte bis etwa 10 erreichen. Deutlich höhere Werte findet man bei den Gamma-Ray-Bursts: γ -Werte bis 1000 wurden beobachtet. Die größten Werte zeigen magnetisch getriebene Pulsarwinde mit einem Gamma bis zu 10 Millionen.