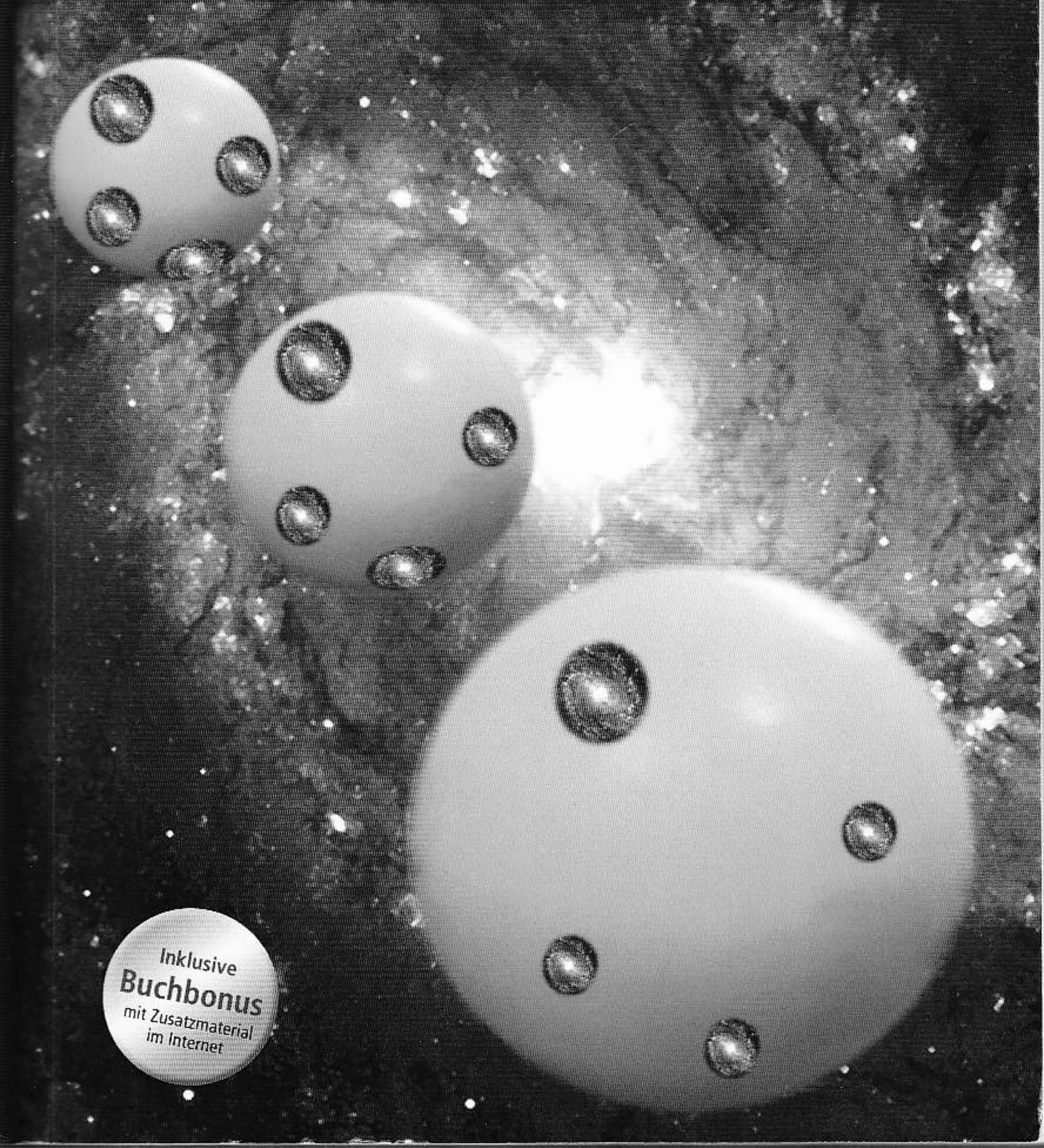
Klaus Becker

Das expandierende Universum

Eine mathematische Reise durch die Zeit



Zusammen mit 3.4.6 folgt dann die Ausgangsgleichung 3.4.4

$$\frac{\delta'(t)}{\delta(t)} = -3 \cdot (1+\alpha) \cdot \frac{a'(t) \cdot a(t)^{-3\cdot(1+\alpha)-1}}{a(t)^{-3\cdot(1+\alpha)}} = -3 \cdot (1+\alpha) \cdot \frac{a'(t)}{a(t)}.$$

Die Aufgabe, mit der wir uns im folgenden Abschnitt beschäftigen, besteht nun darin, die Konstante α für die verschiedenen Zustände des Universums zu bestimmen. Als Ergebnis erhalten wir dann die sogenannten Zustandsgleichungen.

3.5 Die Zustandsgleichungen

Der im System des expandierenden Universums herrschende Druck beeinflusst die Dynamik der Expansion in Abhängigkeit vom Zustand des Systems. Der Zustand wird durch die sogenannten Zustandsgleichungen beschrieben. Im Prinzip bestimmen sie die Proportionalitätskonstante α aus dem letzten Abschnitt mit

3.5.1 $$p(t) = \alpha \cdot c^2 \cdot \delta(t)$$

bzw.

3.5.2 $$\frac{p(t)}{c^2} = \alpha \cdot \delta(t).$$

Für die Herleitung der Zustandsgleichungen für ein aus Strahlung bzw. aus Materie bestehendes Universum stützen wir uns auf die ideale Gasgleichung und den Gleichverteilungssatz (siehe Anhang A2). Die Berechtigung für die Anwendung dieser physikalischen Gesetzmäßigkeiten leitet sich aus der Tatsache ab, dass das Universum in der Frühphase aus einem Gas relativistischer Teilchen bestand (siehe beispielsweise [7]). Dieses Modell lässt sich aber auch, wie bereits bei der Herleitung der Strömungsgleichung unter 2.3, auf ein vorrangig aus Materie bestehendes Universum anwenden. In diesem Fall werden die Galaxien durch die

Gasmoleküle modelliert. Wir gehen nun die einzelnen Zustände der Reihe nach durch.

Strahlungsdominierter Zustand

Wir benutzten die ideale Gasgleichung (siehe Anhang A2)

3.5.3 $$p \cdot V = n \cdot k_B \cdot T$$

mit dem im System herrschenden Druck p, dem Volumen V, der Anzahl n der Gasmoleküle im Volumen, der Temperatur T und der Boltzmann-Konstanten k_B und den Gleichverteilungssatz (siehe Anhang A2)

3.5.4 $$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{3}{2} \cdot k_B \cdot T\,,$$

wobei m die durchschnittliche Masse eines Teilchens und v die mittlere Geschwindigkeit der Teilchen ist. Aus beiden Gleichungen folgt

3.5.5 $$\frac{p}{c^2} = \frac{1}{3} \cdot \delta \cdot \left(\frac{v}{c}\right)^2.$$

Wir betrachten nun ein von elektromagnetischer Strahlung oder allgemeiner, ein von relativistischen Teilchen ausgefülltes Universum. In diesem wird aus 3.5.5 mit $v = c$

$$\frac{p}{c^2} = \frac{1}{3} \cdot \delta\,.$$

Damit lautet die Zustandsgleichung für Strahlung

3.5.6 $$p = \frac{1}{3} \cdot \delta \cdot c^2.$$

Es ist also $\alpha = \frac{1}{3}$ und damit

3.5.7 $\quad \delta_r(t) \approx a(t)^{-3\cdot(1+\alpha)} = a(t)^{-4}$.

Daraus ergibt sich unmittelbar

3.5.8 $\quad \delta_r(t) = \delta_{r,0} \cdot \frac{1}{a(t)^4}$.

Materiedominierter Zustand

Wir betrachten den materiedominierten Zustand, wie wir ihn in der gegenwärtigen Epoche vorfinden. Die Gasmoleküle repräsentieren nun die Galaxien. Die lokale Geschwindigkeit von Galaxien liegt in der Größenordnung von ca. 600 $km \cdot s^{-1}$ (siehe zum Beispiel [7]), sodass

$$\frac{p}{c^2} = \frac{1}{3} \cdot \delta \cdot \left(\frac{v}{c}\right)^2 \approx 10^{-6} \cdot \delta$$

gilt. $p \cdot c^{-2}$ ist damit gegenüber der Materiedichte vernachlässigbar. Die Materie verursacht keinen Druck im System. α ist gleich null und die Zustandsgleichung für Materie lautet

3.5.9 $\quad p = 0$.

Aus der Relation $\delta(t) \approx a(t)^{-3\cdot(1+\alpha)}$ (siehe 3.4.6) folgt mit $\alpha = 0$

3.5.10 $\quad \delta_m(t) \approx a(t)^{-3\cdot(1+\alpha)} = a(t)^{-3}$

und schließlich

3.5.11 $\quad \delta_m(t) = \delta_{m,0} \cdot \frac{1}{a(t)^3}$.

Hinweis

Diese Relation haben wir bereits intuitiv bei der Herleitung der Friedmann-Gleichung verwendet. Bei einem ausschließlich aus Materie bestehenden Universum ist sie trivial, bei anderen Energieformen, wie wir gesehen haben und im Folgenden noch sehen werden, keineswegs. Wir klären nun noch die Situation in einem von der dunklen Energie beherrschten Universum.

Λ - dominierter (von dunkler Energie dominierter) Zustand

Für die Herleitung der Zustandsgleichung für die dunkle Energie verwenden wir die Friedmann-Gleichung und die Beschleunigungsgleichung mit

3.5.12 $$a'(t) = a''(t) = 0$$

in einem flachen Universum. Die Forderung 3.5.12 ergibt sich aus der ursprünglichen Intension Einsteins, der ein statisches Universum postuliert hat. Aus der Friedmann-Gleichung (siehe 2.1.1)

3.5.13 $$\left(\frac{a'(t)}{a(t)}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \cdot \delta(t) + \frac{\Lambda}{3} - \frac{k}{a(t)^2}$$

wird mit $k = 0$

3.5.14 $$\left(\frac{a'(t)}{a(t)}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \cdot \delta(t) + \frac{\Lambda}{3} .$$

Mit $a'(t) = 0$ ist dann

3.5.15 $$\delta(t) = -\frac{\Lambda}{8\pi G} .$$

Aus der Beschleunigungsgleichung (siehe 2.3.1)

3.5.16 $$\frac{a''(t)}{a(t)} = -\frac{4\pi G}{3} \cdot \left(\delta(t) + \frac{3 \cdot p(t)}{c^2}\right) + \frac{\Lambda}{3}$$

folgt mit $a''(t) = 0$

$$0=-\frac{4\pi G}{3}\cdot\left(\delta(t)+\frac{3\cdot p(t)}{c^2}\right)+\frac{\Lambda}{3}.$$

Wir formen um und erhalten

3.5.17 $$\frac{1}{2}\cdot\left(\delta(t)+\frac{3p(t)}{c^2}\right)=\frac{\Lambda}{8\pi G}.$$

Addiert man die beiden Gleichungen 3.5.15 und 3.5.17, so folgt

3.5.18 $$p(t)=-c^2\cdot\delta(t).$$

Damit ist $\alpha=-1$ und

3.5.19 $$\delta_\Lambda(t)\approx a(t)^{-3(1+\alpha)}=1.$$

Die Dichte der dunklen Energie ist also konstant. Wir haben bereits unter 1.7 (siehe 1.7.6) festgestellt, dass eine konstante Energiedichte einen negativen Druck erzeugt und damit eine abstoßende Gravitation. Genau das wollte Einstein ja auch erreichen, eine abstoßende Kraft, die das Universum daran hindert, zu kollabieren. Wir wiederholen die Argumentation.

Aus $\delta_\Lambda=const.$ und $E=c^2\cdot\delta_\Lambda\cdot V$ folgt mit dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik bei adiabatischer Expansion (siehe Anhang A2)

3.5.20 $$p\cdot\frac{dV}{dt}+\frac{dE}{dt}=0$$

und dann

$$p\cdot\frac{dV}{dt}+\frac{c^2\cdot\delta_\Lambda\cdot dV}{dt}=(p+c^2\delta_\Lambda)\cdot\frac{dV}{dt}=0$$

und damit

3.5.21 $$p = -c^2 \cdot \delta_\Lambda .$$

$\delta_\Lambda \hat{=}$ positive Vakuumenergiedichte

3.6 Die Friedmann-Gleichung mit Dichteparametern

Im diesem Abschnitt gehen wir mit den Dichteparametern in die Friedmann-Gleichung. Dadurch erhalten wir eine sehr übersichtliche Form der Gleichung, die bei den noch folgenden Diskussionen wertvolle Hilfe leistet. In einem zweiten Schritt nutzen wir die Abhängigkeit der Dichteparameter von den aktuellen Werten wie wir sie unter 3.5 aus den Zustandsgleichungen abgeleiteten haben. Damit führen wir die Friedmann-Gleichung auf zumindest grundsätzlich messbare Größen zurück. Wir gehen zunächst mit (siehe 3.3.3)

3.6.1 $$\Omega(t) = \Omega_r(t) + \Omega_m(t) + \Omega_\Lambda(t)$$

in die Friedmann-Gleichung (siehe 2.2.1)

3.6.2 $$H(t)^2 = \frac{8\pi G}{3}\delta(t) + \frac{\Lambda}{3} - \frac{k}{a(t)^2} .$$

Es folgt

$$H(t)^2 = \frac{8\pi G}{3} \cdot \left(\delta(t) + \frac{\Lambda}{8\pi G} \right) - \frac{k}{a(t)^2}$$

$$= \frac{8\pi G}{3} \cdot \left(\delta_r(t) + \delta_m(t) + \delta_\Lambda(t) \right) - \frac{k}{a(t)^2}$$

$$= \frac{8\pi G}{3} \cdot \Omega(t) \cdot \delta_c(t) - \frac{k}{a(t)^2} = \Omega(t) \cdot H(t)^2 - \frac{k}{a(t)^2}$$

und nach Division durch $H(t)^2$